

令和7年度 崇城大学 薬学部 一般公募制推薦選抜入学試験問題

数学 (70分) (1/3)

総点

I 次の各問に答えよ。

(1) $f(x) = x^2 + ax + a + 1$ (a は定数) とする。(a) 2次関数 $y = f(x)$ のグラフを, x 軸方向に1, y 軸方向に2だけ平行移動すると, $y = x^2 + 3x + 4$ になった。このときの a の値を求めよ。(b) すべての実数 x に対して, 不等式 $f(x) > 0$ が成り立つような a の値の範囲を求めよ。(2) (a) 2次方程式 $x^2 + 5x + 2 = 0$ の2つの解を α, β とするとき, $\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha}$ および $\alpha^4 + \beta^4$ の値を求めよ。(b) a を正の定数とする。不等式 $a^{2x-3} + (1-a^3)a^{x-3} - 1 > 0$ を解け。

令和7年度 崇城大学 薬学部 一般公募制推薦選抜入学試験問題

数 学 (70分) (2/3)

- ② $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ (a, b は定数) について, $f(2) = 2$, $f'(2) = -3$ である。次の各問に答えよ。
- a, b の値を求めよ。
 - 関数 $f(x)$ の極値とそのときの x の値を求めよ。
 - 方程式 $f(x) - p = 0$ の実数解の中で, $0 \leq x \leq 2$ の範囲にあるものがただ1つであるための定数 p の条件を求めよ。

令和7年度 崇城大学 薬学部 一般公募制推薦選抜入学試験問題

数 学 (70分) (3/3)

- ③ 定数 a は $0 < a < 2$ とする。3直線 $l: y = 2x$, $m: y = ax + 1$, $n: y = -x$ について、 l と m の交点を A , m と n の交点を B とする。次の各問に答えよ。
- (1) 2点 A , B の座標を a で表せ。
 - (2) $\triangle OAB$ の面積 S を a で表せ。ただし、 O (オー) は原点とする。
 - (3) $\triangle OAB$ の面積 S が最小となるような a の値とそのときの S を求めよ。

1

- (1) (a) 放物線 $y = f(x)$ を x 軸方向に 1, y 軸方向に 2 だけ平行移動した放物線の方程式は $y - 2 = (x - 1)^2 + a(x - 1) + a + 1$ なので, これを計算すると,

$$y = (x - 1)^2 + a(x - 1) + a + 1 + 2 = x^2 + (a - 2)x + 4$$

この方程式が $y = x^2 + 3x + 4$ であるので, $a - 2 = 3$ より, $a = 5$ …… (答)

- (b) $f(x) = 0$ の判別式を D とすると, すべての実数 x に対して $f(x) > 0$ が成り立つのは $D < 0$ のときである。

$$D = a^2 - 4(a + 1) = a^2 - 4a - 4 < 0$$

$a^2 - 4a - 4 = 0$ の解が $x = 2 \pm 2\sqrt{2}$ なので, $2 - 2\sqrt{2} < a < 2 + 2\sqrt{2}$ …… (答)

- (2) (a) 解と係数の関係より $\alpha + \beta = -5$, $\alpha\beta = 2$ である。

$$\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha} = \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)}{\alpha\beta} = \frac{-125 - 3 \cdot 2(-5)}{2} = -\frac{95}{2} \quad \dots\dots (\text{答})$$

$$\begin{aligned} \alpha^4 + \beta^4 &= (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2(\alpha\beta)^2 = \{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta\}^2 - 2 \cdot 2^2 = (25 - 2 \cdot 2)^2 - 8 \\ &= 21^2 - 8 = 433 \quad \dots\dots (\text{答}) \end{aligned}$$

- (b) 両辺に a^3 をかけると $a^3 > 0$ であるから $a^{2x} + (1 - a^3)a^x - a^3 > 0$

$$a^x = t \text{ とおくと } t^2 + (1 - a^3)t - a^3 > 0$$

$$(t - a^3)(t + 1) > 0$$

$$t < -1, a^3 < t$$

$$\text{ここで } t = a^x > 0 \text{ より } a^3 < t = a^x$$

よって $0 < a < 1$ のとき $x < 3$, $a = 1$ のとき 解なし, $a > 1$ のとき $x > 3$ …… (答)

2 (1) $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$, $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ であるから

$$f(2) = 2 \text{ より } 8 + 4a + 2b = 2 \quad \cdots\cdots\text{①}$$

$$f'(2) = -3 \text{ より } 12 + 4a + b = -3 \quad \cdots\cdots\text{②}$$

①-②より

$$-4 + b = 5 \quad \therefore b = 9$$

②に $b = 9$ を代入して

$$12 + 4a + 9 = -3$$

$$4a = -24$$

$$a = -6$$

よって

$$\begin{cases} a = -6 \\ b = 9 \end{cases} \quad \cdots\cdots \text{(答)}$$

(2) (1)より $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ であるから

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3)$$

よって、 $y = f(x)$ の増減表は次のようになる。

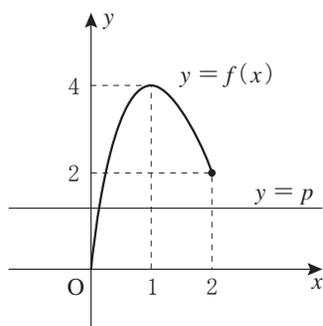
x	...	1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	4	↘	0	↗

よって

$$\begin{cases} x = 1 \text{ のとき} & \text{極大値 } 4 \\ x = 3 \text{ のとき} & \text{極小値 } 0 \end{cases} \quad \cdots\cdots \text{(答)}$$

(3) 与えられた条件は、 $0 \leq x \leq 2$ において曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = p$ がただ 1 点で交わることを言い換えることができる。

(2)の増減表と、 $f(0) = 0$ と $f(2) = 2$ に注意して $0 \leq x \leq 2$ における $y = f(x)$ のグラフを描くと下のようになる。



このグラフと $y = p$ がただ 1 点で交わるのは、

$$0 \leq p < 2 \text{ または } p = 4 \quad \cdots\cdots \text{(答)}$$

3 (1) $2x = ax + 1$ より $x = \frac{1}{2-a}$, よって $A\left(\frac{1}{2-a}, \frac{2}{2-a}\right)$
 $ax + 1 = -x$ より $x = \frac{-1}{a+1}$, よって $B\left(\frac{-1}{a+1}, \frac{1}{a+1}\right)$

(2) 直線 m と y 軸との交点を C とする。 C の y 座標が 1 より

$$\triangle OAC \text{ の面積 } S_1 = \frac{1}{2} \times 1 \times \left| \frac{1}{2-a} \right|$$

$$\triangle OBC \text{ の面積 } S_2 = \frac{1}{2} \times 1 \times \left| \frac{-1}{a+1} \right|$$

$$0 < a < 2 \text{ より } S_1 = \frac{1}{2(2-a)}, S_2 = \frac{1}{2(a+1)}$$

$$\text{よって, } S = S_1 + S_2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(2-a)(a+1)} \quad \dots\dots \text{ (答)}$$

(3) 題意を満たす a の値を求めるには、 $0 < a < 2$ において

$g(a) = (2-a)(a+1)$ が最大値をとるような a の値を求めればよい。

$$g(a) = -a^2 + a + 2 = -\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$$

よって、 $a = \frac{1}{2}$ のとき $g(a)$ は最大値 $\frac{9}{4}$ をとる。

ゆえに、 $a = \frac{1}{2}$ のとき S は最小値 $\frac{2}{3}$ をとる。 $\dots\dots$ (答)