受験番号		氏 名	

令和７年度　崇城大学　一般選抜入学試験問題（後期日程）

数　学

（１／２）

総点	

1　次の各問に答えよ。

⑴　$a>0$ とする。関数 $y=2x^2-2ax+b$（$0\leqq x\leqq a$）の最大値が 8，最小値が 5 であるとき，定数 a，b の値を求めよ。

⑵　実数 x について，$2^{\frac{x}{2}}+2^{-\frac{x}{2}}=a$ とするとき，2^x+2^{-x} および $2^{3x}+2^{-3x}$ を a を用いて表せ。

⑶　x，y が２つの不等式 $0\leqq 3x+y\leqq 3$，$2\leqq y\leqq 4$ を同時に満たすとき，$x-y$ の最大値および最小値を求めよ。

点		

受験番号		氏 名	

令和７年度　崇城大学　一般選抜入学試験問題（後期日程）

数　学

$\boxed{2}$　放物線 $y = x^2 - 5x + 7$ について，傾き -1 の接線を l_1，傾き７の接線を l_2 とするとき，次の各問に答えよ。

⑴　接線 l_1，l_2 の方程式をそれぞれ求めよ。

⑵　この放物線と２つの接線 l_1，l_2 で囲まれた図形の面積を求めよ。

$\boxed{3}$　△OABにおいて，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = 2$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = 3$，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}| = 4$ とし，辺ABの中点をCとする。次の各問に答えよ。

⑴　内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の値，および線分OCの長さを求めよ。

⑵　点Pを辺OB上の点とする。$\angle\mathrm{OCP} = 90°$ であるとき，OP：PBを求めよ。

点		

数学（一般後期）

1

(1) $y=2\left\{\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}\right\}+b=2\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{2}+b$

軸の方程式は $0\leqq x\leqq a$ の内側にあるため，頂点において最小値をとる

よって $-\dfrac{a^2}{2}+b=5$ ……①

また，軸の方程式が $x=\dfrac{a}{2}$ より，最大値をとるのは $x=0,\ a$ のとき

与えられた2次関数に $x=0$ を代入して，$8=2\cdot0^2+2a\cdot0+b$ よって $b=8$ ……②

②を①に代入 $-\dfrac{a^2}{2}+8=5$

$a^2=6$ $a>0$ であるから $a=\sqrt{6}$

よって $a=\sqrt{6},\ b=8$ ……（答）

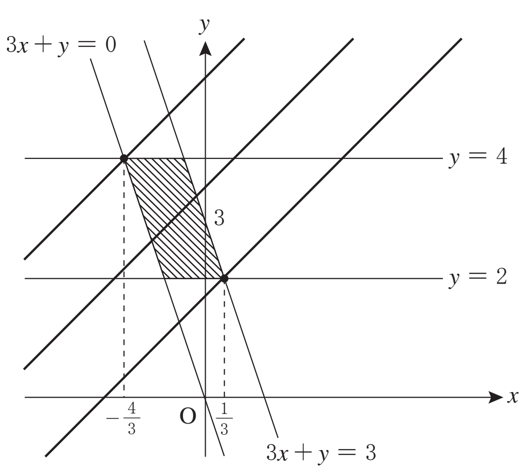
(2) $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ であることから，

$$\begin{aligned}2^x+2^{-x}&=(2^{\frac{x}{2}})^2+2\cdot2^{\frac{x}{2}}\cdot2^{-\frac{x}{2}}+(2^{-\frac{x}{2}})^2-2\cdot2^{\frac{x}{2}}\cdot2^{-\frac{x}{2}}\\&=(2^{\frac{x}{2}}+2^{-\frac{x}{2}})^2-2\\&=a^2-2\end{aligned}$$ ……（答）

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$ であることから，

$$\begin{aligned}2^{3x}+2^{-3x}&=(2^x+2^{-x})\{(2^x)^2-2^x\cdot2^{-x}+(2^{-x})^2\}\\&=(2^x+2^{-x})\{(2^x)^2+2\cdot2^x\cdot2^{-x}+(2^{-x})^2-3\cdot2^x\cdot2^{-x}\}\\&=(2^x+2^{-x})\{(2^x+2^{-x})^2-3\}\\&=(a^2-2)\{(a^2-2)^2-3\}\\&=(a^2-2)(a^4-4a^2+1)\\&=a^6-6a^4+9a^2-2\end{aligned}$$ ……（答）

(3) 2つの不等式 $0\leqq 3x+y\leqq 3$，$2\leqq y\leqq 4$ で定まる x，y の範囲を座標平面上に表すと，下図の斜線部のようになる（境界を含む）。



$(x,\ y)$ がこの斜線部を動くときの $x-y$ の範囲を見るには，

$$x-y=k,\qquad \text{すなわち}\qquad y=x-k$$

とおき，この直線が斜線部と共有点をもつような k の範囲を求めればよい。

すると，k が最大になる（切片 $-k$ が最小になる）のは点 $\left(\dfrac{1}{3},\ 2\right)$ を通るときであり，k が最小になる（切片 $-k$ が最大になる）のは点 $\left(-\dfrac{4}{3},\ 4\right)$ を通るときだから，

最大値：$k=\dfrac{1}{3}-2=-\dfrac{5}{3}$ ……（答）

最小値：$k=-\dfrac{4}{3}-4=-\dfrac{16}{3}$ ……（答）

2

⑴ $y=x^2-5x+7$ の導関数は $y'=2x-5$ である。接線 l_1 の傾きが -1 であるので，放物線と l_1 の接点の x 座標は $2x-5=-1$ より $x=2$ である。また，この接点の y 座標は $y=2^2-5\cdot 2+7=1$ であるので，l_1 の方程式は，

$y=-(x-2)+1 \implies y=-x+3$ ……（答）

同様に，接線 l_2 の傾きは 7 であるので，放物線と l_2 の接点の x 座標は $2x-5=7$ より $x=6$ である。この接点の y 座標は $y=6^2-5\cdot 6+7=13$ であるので，l_2 の方程式は，

$y=7(x-6)+13 \implies y=7x-29$ ……（答）

⑵ l_1 と l_2 の交点の x 座標は，$7x-29=-x+3$ より $x=4$ である。
$x^2-5x+7 \geqq -x+3$，$x^2-5x+7 \geqq 7x-29$ であることから，求める面積は，

$$\int_2^4\{(x^2-5x+7)-(-x+3)\}\,dx+\int_4^6\{(x^2-5x+7)-(7x-29)\}\,dx$$
$$=\int_2^4(x^2-4x+4)\,dx+\int_4^6(x^2-12x+36)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\right]_2^4+\left[\frac{1}{3}x^3-6x^2+36x\right]_4^6$$
$$=\left(\frac{1}{3}\cdot 4^3-2\cdot 4^2+4\cdot 4\right)-\left(\frac{1}{3}\cdot 2^3-2\cdot 2^2+4\cdot 2\right)$$
$$+\left(\frac{1}{3}\cdot 6^3-6\cdot 6^2+36\cdot 6\right)-\left(\frac{1}{3}\cdot 4^3-6\cdot 4^2+36\cdot 4\right)$$
$$=\frac{208}{3}-64$$
$$=\frac{16}{3}$$ ……（答）

3

⑴ $|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|^2=16$

$|\overrightarrow{OA}|^2-2\,\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OB}|^2=16$

$|\overrightarrow{OA}|=2$，$|\overrightarrow{OB}|=3$ を代入すると　$4-2\,\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+9=16$

$\therefore\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-\dfrac{3}{2}$ ……（答）

$\overrightarrow{OC}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}$ より $|\overrightarrow{OC}|^2=\dfrac{1}{4}\left(|\overrightarrow{OA}|^2+2\,\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OB}|^2\right)=\dfrac{1}{4}(13-3)=\dfrac{5}{2}$

$|\overrightarrow{OC}|>0$ より　$|\overrightarrow{OC}|=\sqrt{\dfrac{5}{2}}$ ……（答）

⑵ $\mathrm{OP}:\mathrm{PB}=t:(1-t)$ とおくと　$\overrightarrow{CP}=(1-t)\overrightarrow{CO}+t\,\overrightarrow{CB}$

今 $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{CP}=0$ より　$0=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{CP}=(1-t)\,\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{CO}+t\,\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{CB}$

$(t-1)|\overrightarrow{OC}|^2+t\,\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{CB}=0$

ここで $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{CB}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}\cdot\dfrac{\overrightarrow{AB}}{2}=\dfrac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}}{2}\cdot\dfrac{\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}}{2}=\dfrac{1}{4}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$

$=\dfrac{1}{4}\left(|\overrightarrow{OB}|^2-|\overrightarrow{OA}|^2\right)=\dfrac{1}{4}(3^2-2^2)=\dfrac{5}{4}$

$(t-1)\dfrac{5}{2}+t\cdot\dfrac{5}{4}=0$　　$\therefore\ t=\dfrac{2}{3}$

$\therefore\ \mathrm{OP}:\mathrm{PB}=\dfrac{2}{3}:\left(1-\dfrac{2}{3}\right)=2:1$ ……（答）